

# 逻辑主义因何而失败

复旦大学 郝兆宽  
2016.11.15 浙江大学

# 弗雷格的逻辑主义构想

- I hope I may claim in the present work to have made it probable that the laws of arithmetic are analytic judgements and consequently a priori. Arithmetic thus becomes simply a development of logic, and every proposition of arithmetic a law of logic, albeit a derivative one. (FA,87)

# 基本原则五

- $(\forall F)(\forall G)(\varepsilon F = \varepsilon G \equiv \forall x(Fx \equiv Gx))$
- 概念是由其外延，即属于这个概念的全体对象的集合所决定的。
- 任给一个概念G，总存在一个集合 $\varepsilon G$ ，是G的外延。

# 罗素悖论

- 令概念 $R$ 为：不属于自身
- $\varepsilon R = \{x : Rx\} = \{x : x \text{ 不属于自身}\}$
- $\varepsilon R$ 属于 $\varepsilon R$ 当且仅当 $\varepsilon R$ 不属于 $\varepsilon R$

# 逻辑主义的“失败”

- 对于一个科学工作者来说，最不幸的事情莫过于：当他的工作接近完成时却发现那大厦的基础已经动摇。而伯特兰·罗素的一封信却置我于这样的境地。

# 问题没那么简单

- 如果没有罗素悖论，弗雷格的规划是否可以成功？
- 算术是逻辑，这里的逻辑指的是什么？
- 如果逻辑是纯粹的形式，如何能导出算术规律？
- .....

# 古老的问题

- 逻辑是纯形式的
- 逻辑是思想的规则
- 所得：逻辑是必然的
- 所失：逻辑是空洞的

# 古老的问题

- 集合论是逻辑 (描述集合)
- 数学是逻辑 (描述数学对象)
- 所得：逻辑有着丰富的内容
- 所失：逻辑命题是可错的



# 学科的现实

- 形式逻辑是逻辑学家的工作
- 批判性思维是“逻辑学家”在授课
- 集合论是逻辑学家的工作
- 模型论是逻辑学家的工作

# 哲学的负担

- 数学是关于什么的？
- 数学命题是什么性质的命题？
- 集合、数这类抽象对象如何存在？
- 即使存在，我们如何认识？

# 当代的讨论：Goldfarb 2001

- My central aims in this paper have been to delineate Frege's **universalist conception of logic** and contrast it with a more familiar one, to show that this conception connects with many other points in Frege's philosophy, and to suggest that **the conception is a well motivated one, given the nature of Frege's project.** Of course, today most of us would find **the schematic conception** (or some variant of it) far more natural, if not unavoidable.

# 当代的讨论：MacFarlane 2002

- Like Kant, many contemporary philosophers conceive of logic in a way that makes Fregean logicism look incoherent. Logic, they say, cannot have an ontology, cannot make existence claims. If this is meant as a quasi-analytic claim about logic (as I think it usually is), then Frege's project of grounding arithmetic in pure logic is hopeless from the start.

# 关于分析性：2014

- 弗雷格不认为分析性是“因语词为真”，也不是同语反复，而是“逻辑地为真”，这个逻辑与康德、逻辑经验主义者理解的形式逻辑不同，它不仅包括形式推理，还包括有关一些最为基本的概念的理论，如类、集合等。它不仅是必然的，而且还能扩展我们的知识，至少所有数学知识都是来自于这个逻辑。

# 共识与分歧

- 共识：逻辑是普遍的
- 分歧：普遍意味着空洞的形式 vs.  
普遍性源自逻辑的对象是概念

- For Kant, the generality of logical laws consists in their abstraction from the content of judgments, while for Frege, the generality of logical laws consists in their unrestricted quantification over all objects and all concepts. Hence Kant's notion of generality makes it impossible for logical laws to have substantive content, while Frege's is consistent with his view that logical laws say something about the world.

# 论证：普遍性蕴涵形式性

- (LS) General logic must abstract entirely from the relation of thought to sensibility.
- (CS) For a concept to have content is for it to be applicable to some possible object of sensible intuition.
- (LC) General logic must abstract entirely from the contents of concepts.



- A. 如果  $S$  是一个逻辑语句,则  $S$  的真不取决于任何一个具体的经验事实。
- B. 一个语句有语义内容,当且仅当它描述了经验世界。
- C. 语句  $S_1$  描述经验世界当且仅当  $S_1$  陈述了一个具体的经验事实(或它的反面)。
- D. 一个有经验内容的语句之真取决于它所描述的经验事实。
- E. 一个逻辑语句没有任何经验内容,因此是纯形式的。

# 拒绝(CS)或B

- 我还必须反对康德以下断言的普遍性:离开感性,我们不能有任何概念被给予。零和一就不是能通过感性被给予的对象。 (FA,89)
- 类和概念也可以看作是真实的对象……假设这样的对象与假设物理客体 (physical body) 一样是合法的,也有同样多的理由相信它们的存在。它们对于获得一个令人满意的数学系统是必须的,正像物理客体对一个令人满意的关于我们的感性知觉 (sense perception) 的理论是必须的一样。 (Gödel,1944)

# 逻辑的普遍性

- 逻辑的普遍性源自它抽掉了任何具体内容。
- 逻辑的普遍性源自它的对象——概念——的普遍性。
- 任何科学都具有某种程度的普遍性。
- 逻辑是最普遍的科学：纯形式 v.s. 以概念为对象

# 作为概念论的逻辑

- 算术是概念的属性，所以是逻辑的。
- 概念是最普遍的对象，所以算术是最普遍的科学。
- 算术的基础似乎比任何经验科学都来得深刻，甚至比几何学还要深。算术真理统治着那些可计数的东西。这是最为广泛的领域，因为它不仅包括现实的，也不仅包括可直观的，还包括任何可思想的东西。

(FA14)

- 概念是客观的
- That a statement of number should express something factual independent of our regarding things can surprise only those who think a concept is something subjective like an idea. But this is a mistaken view.(FA, 47)
- Subjective means that we can form concepts arbitrarily by correct principles of formations of thought. Since the principles leading to the paradoxes seem to be quite correct in this sense, the paradoxes prove that subjectivism is mistaken. (LJ,7.4.5)

# 概念论逻辑的结构

- 逻辑是关于形式的东西的理论。它包括集合论和概念论。初等(或谓词)逻辑、非初等逻辑和集合论之间的区别主要是主观的区别。主观的区别依赖于心灵特殊的情形。形式的东西与心灵无关。因此,什么是逻辑是一个客观的问题。客观的逻辑蕴涵是范畴性的。初等逻辑是有穷心灵的逻辑。你若是有无穷的心灵,你便有了集合论。比如,一万个元素的有穷论域上的集合论就是初等逻辑的一部分。(LJ, 8.4.18)

- Lower functional calculus [predicate logic] consists of rules of inference. It is not natural to use axioms. It is logic for the finite mind. But we can also add logical constants such as many, most, some (in the sense of plurality), necessarily, and so on. For the infinite mind, axioms of set theory are also rules of inference.  
(LJ, 8.4.15)

# 外延与内涵

概念

有穷集合

无穷集合

类 (proper)

形式规则

集合论

不一致

谓词逻辑

数学

悖论



# 两种悖论的重要区别

- Let  $w$  be the predicate: to be a **predicate** that cannot be predicated of itself. Can  $w$  be predicated of itself? From each answer its opposite follows. Therefore we must admit that  $w$  is not a predicate.
- Likewise there is no **class** (as a totality) of those classes, which, each taken as a totality, do not belong to themselves. From this I conclude that under certain circumstances a definable collection (Menge) does not form a totality. (Russell, letter to Frege)

- It is customary to think of these two forms of Russell's paradox as slight variants of each other. I was surprised when Gödel repeatedly emphasized the importance of distinguishing the extensional (about sets and classes) from the intensional (about predicates or concepts) paradoxes in his discussions with me from 1971 to 1972. I soon began to appreciate the relevance of this contrast to his conception of logic and to the familiar distinction between sets and classes in the literature. In recent years I have come to believe that the same contrast is crucial for a clarification of Frege's conception of logic and its relation to Cantor's set theory. (Hao Wang, What is Logic)

# 概念论是超越的集合论

- 长久以来,逻辑和数学被混为一谈。一旦我们在集合与概念之间做出鲜明的区分并利用这种区分,我们就造就了几项进展。依照集合的迭代概念,我们有了普通数学的一个合理可信的基础。为了总体上把握逻辑,超越集合就成为可理解的,并且事实上必要的一步。 (LJ,361)

# 逻辑主义的“失败”

- 按照当代的解释，弗雷格的逻辑主义因罗素悖论而失败，这几乎成了一个常识性命题。那很自然地，我们可以问：如果没有罗素悖论，逻辑主义就成功了吗？在当代分析哲学的文献中，对这个问题的回答依然是否定的。因为自蒯因以后，分析哲学家认为集合不是一个逻辑概念，集合论不是逻辑的一部分，集合论命题不是分析命题，这是分析哲学的又一个常识。

- 所以，对这段历史的正确描述应该是这样：罗素悖论的出现，导致弗雷格计划的失败，同时使得哲学家普遍怀疑集合（类）这个概念。但是当数学家们用公理化的方法消除了悖论之后，维也纳学派的逻辑经验论者重新解释了分析性，使其精神上完全回到了康德式的理解。弗雷格在《算术基础》中对分析性的另辟蹊径的工作被完全忽略了。而在逻辑经验论的分析性概念下，把数学还原为逻辑的逻辑主义纲领从理论上就没有成功的可能，因为数学不可能是同语反复，数学命题不可能全部还原为等同式。如果伯格侯森对分析性的理解真是属于弗雷格的话，那弗雷格肯定不会提出他的逻辑主义纲领了。

- 这里的混淆之处在于，当弗雷格决心把算术命题定义为分析性命题以及倍受罗素悖论打击的时候，逻辑经验主义还没有兴起。而当罗素悖论被公理化方法解决以后，分析命题即是同语反复的哲学立场流行起来，本来有复活希望的逻辑主义纲领又再次破灭了，但人们谈论它失败的原因时，还是按以往的说法，归咎于罗素悖论。因为分析性概念的转变是悄然进行的，这种悄然进行造成一种错觉，似乎自康德以来，我们只有唯一的对分析性的理解。因此，公平地说，逻辑主义的失败原因不是罗素悖论，而是逻辑经验主义的分析性概念控制了我们的时代。

# 关于分析性：2014

- 我们不得不承认经验主义者这条论证的线路十分精妙。把“一切知识皆源自经验”这个信条隐藏在语言、意义、同义性、逻辑、代入……等等这些技术性的术语之中，使人们误以为经验论的哲学建立在基于现代逻辑的一个中立的技术性框架之上，而他们关于先天综合命题、分析命题的否定性结论不过是这个中立框架的必然要求，……试想，如果我们的语言中只有经验命题是合法的，或者先天综合命题和分析命题都是高度可疑的，那我们怎么再有机会探讨人类是否有关于非物理世界知识的可能性呢？除了象密尔那样把逻辑、数学这类知识也以经验的方式加以解释，我们还能有什么别的选择呢？

# 基本原则五与外延主义

- 基本原则五： $(\forall F)(\forall G)(\varepsilon F = \varepsilon G \equiv \forall x(Fx \equiv Gx))$
- 它要求：每个概念都有一个集合作为它的外延。
- 这是外延主义处理概念的方略。



# 休谟原则

- 休谟原则： $(\forall F)(\forall G)(\#F = \#G \equiv F \approx G)$
- 休谟原则足以推导出二阶皮亚诺算术。
- 休谟原则不满足外延主义的要求。
- 新弗雷格主义不是弗雷格主义。

# 罗素悖论击中的是外延主义

- Logic, as construed on the universalist conception, is also in back of a doctrine of Frege's that many have found **puzzling**, namely, that all functions be defined everywhere; for the special case of concepts, this is the requirement that concepts “have sharp boundaries”.

- Frege seems to assume implicitly that every set is the extension of some concept, so that set theory is a part, and indeed a corollary, of the theory of concepts. This assumption leads to no contradiction but is misleading methodologically. The difficulty in Frege's logic comes essentially from his belief that the range of instances of each concept is a set, that every concept has an extension and "the extension of a concept" is always a set, and therefore an object. (Hao Wang)

# 弗雷格主义“失败”的真正原因

1. 弗雷格的逻辑观念与分析哲学的逻辑观念不一致，按照分析哲学逻辑观念，弗雷格的逻辑主义从一开始就是不合理的构想。
2. 按照哥德尔的概念论的逻辑观，弗雷格误以为每个概念都以一个集合为外延，罗素悖论则揭示出真类的存在。所以他的逻辑主义在此意义上是未完成的规划。

谢谢！