集体认定中的不一致和合取原则

刘壮虎

北京大学哲学系，liuzhh@pku.edu.cn

摘　要

集体认定是按一定的规则，综合集体中每个人的意见，对命题的一种断定。法律审判中的陪审员制度，社会政治生活中的选举、决议等都是集体认定的典型例子。

人们很早就发现，集体认定中会出现不一致，合理的认定得到的若干命题放在一起可以是不一致的。人们的研究往往从社会学的角度出发，集中在对于规则合理性的讨论，而不是对不一致现象本身的讨论。

集体认定还有一种类似于不一致的现象：合取原则的失效。而在大多数关于集体认定的研究中，合取原则失效的问题并没有得到讨论。

本文从现有的集体认定的规则出发，总结出一些基本的原则，包括认定集体中的个人的原则和认定集体的集体的原则，在这些原则的基础上建立了集体认定逻辑系统，在此逻辑系统中严格定义了不一致和合取原则，给出并证明了不一致现象产生和合取原则失效的条件。

一、引言

逻辑的应用有两个方面，一个方面是将逻辑应用在人们的日常思维中，这种应用不能称为某某领域的逻辑；另一方面是对特定领域中的出现的命题，联结词、算子等加以研究，总结了这个领域的普遍的逻辑规律，这才是这个领域的逻辑。集体认定的逻辑就是这样的一种应用逻辑。

集体认定是按一定的规则，综合集体中每个人的意见，对命题的一种断定。法律审判中的陪审员制度，社会政治生活中的选举、决议等都是集体认定的典型例子。

人们很早就发现，集体认定中会出现不一致，合理的认定得到的若干命题放在一起可以是不一致的。人们常用的例子是法律上的，涉及有罪还是无罪。我这里举一个温和的例子：

北京大学哲学系 03 级学生准备在星期天出去游玩。有人提议“去颐和园”，得到 2/3 的人的支持。颐和园里的佛香阁是需要另外买票的，去不去佛香阁呢？有人提议“如果去颐和园则去佛香阁”，得到 2/3 的人的支持，有人提议“如果去颐和园则不去佛香阁”，也得到 2/3 的人的支持。按少数服从多数原则，三个提议都通

过。但它们是不一致的，无法同时实现。

这种情况是可以出现的。设“去颐和园”为命题α，“去颐和园”为命题β。学生中有 1/3 的人不想去颐和园（认定$\neg\alpha$），有 1/3 的人想去颐和园也想去佛香阁（认定$\alpha\wedge\beta$），有 1/3 的人想去颐和园不想去佛香阁（认定$\alpha\wedge\neg\beta$）。认定$\alpha\wedge\beta$和认定$\alpha\wedge\neg\beta$的学生（共 2/3）认定了α，认定$\neg\alpha$和认定$\alpha\wedge\beta$的学生（共 2/3）认定了$\alpha\rightarrow\beta$，认定$\neg\alpha$和认定$\alpha\wedge\neg\beta$的学生（共 2/3）认定了$\alpha\rightarrow\neg\beta$。

在集体认定中，另外一个重要的逻辑原则合取原则也不成立。请看以下例子：

北京大学同时有两个展览，展览 1 和展览 2。哲学系 03 级学生的班级活动是参观展览。“参观展览 1”和“参观展览 2”的提议都有 2/3 的学生支持，这两个提议都被通过。但“既参观展览 1 又参观展览 2”的提议只有 1/3 的学生支持，这个提议没有被通过。

这种情况是简单的。有 1/3 的学生想参观展览 1 但不想参观展览 2，有 1/3 的学生想参观展览 2 但不想参观展览 1，有 1/3 的学生既想参观展览 1 又想参观展览 2。

我们将构造集体认定的逻辑，深入讨论不一致性和合取原则，给出它们的充要条件。

二、形式语言

“认定α”称为认定命题，其中的α称为被认定的命题。这两类命题是不同的。

1. 被认定的命题不一定有真值，如规范命题、将来行动的命题等。
2. 对被认定的命题要考虑的是集体中的个体的认定态度，和这命题的真值（如果它有真值的话）没有关系。
3. 认定命题是事实命题，具有确定的真假值。

所以我们需要一种分层的形式语言，在这种语言中，没有重叠的认定词，也没有混合的公式。

集体认定逻辑的形式语言如下：

初始符号

1. 命题变项 $p_1,\ldots,p_n,\ldots\ldots$；
2. 命题联结词 ~、∩；
3. 公式联结词 ¬、∧；
4. 认定算子 F；
5. 括号)、(。

命题 (用α,β,γ等表示)

1. 命题变项是命题；
2. 如果α是命题，则~α是命题；
3. 如果α, β是命题，则$\alpha\cap\beta$是命题。

这里的命题相等于命题逻辑中的公式，所以命题逻辑中的概念都能在这里使用，如重言式、矛盾式、一致、不一致等。还有一个重要的关于命题的概念。

$\alpha_1,\cdots,\alpha_k$是k个命题，如果其中任意k–1个命题都推不出另一个命题，则称$\alpha_1,\cdots,\alpha_k$是**独立**的。注意，这里的推出是指古典逻辑中的推出。

$\alpha_1,\cdots,\alpha_k$是独立还有一个等价条件：

$\alpha_1,\cdots,\alpha_k$是独立的 当且仅当 其中任意k–1个命题和另一个命题的否定是一致的。

公式（用A, B, C等表示）

1. 如果α是命题，则F(α)是公式，它们称为原子公式（直观意义是集体认定α）；
2. 如果A是公式，则$\neg A$是公式；
3. 如果A, B是公式，则$(A\wedge B)$是公式。

按通常的方法定义$A\vee B$、$A\rightarrow B$和$A\Leftrightarrow B$。

三、集体认定的基本原则

集体认定的原则有两类，集体中的个人对命题的认定原则，集体根据个人认定的结果作出集体认定的原则。

个人认定的原则

(1) **有限性**。个人对被认定的命题的态度只有有限种。

一般情况下，认定的态度是两种(同意和反对)，或三种(再加上弃权)，但为了更广泛，允许有任意有限值。

(2) **组合原理**。对复合命题的认定态度，是对支命题认定态度的函项。

组合原理是弗雷格提出的建立逻辑系统的基本原则，逻辑系统一般都遵守组合原理，除非有特别的理由。

由(1)和(2)，个人对被认定的命题的态度模式可用某个多值逻辑D来表示，这种多值逻辑称为**态度逻辑**。

个人对于被认定的命题的态度中至少包括“同意”（以后记为1）和“反对”（以后记为0）两种，这两种态度称为明确的，其它的态度称为不明确的。

(3) **拟古典逻辑性**。“同意”和“反对”这两种明确的态度满足古典逻辑规律。

这样，态度逻辑就是古典逻辑的扩充，因此任何一个古典逻辑的赋值 V 也是 D 上的赋值。特别地，古典逻辑 **P** 也是态度逻辑。

如果$\alpha_1,\cdots,\alpha_k$是一致的，则存在古典逻辑的赋值 V（也是 D 上的赋值），使得任给 $1\le j\le k$，都有 $V(\alpha_j) = 1$。

如果$\alpha_1,\cdots,\alpha_k$是独立的，则任给 $1\le j\le k$，$\sim\alpha_j$和其它公式是一致的，所以任给 $1\le j\le k$，都存在 D 上的赋值 V，使得任给 $1\le i\le k$，都有 $V(\alpha_i) = 1(i\ne j)$且 $V(\sim\alpha_j) = 0$。这种赋值称为$\alpha_1,\cdots,\alpha_k$的**特征赋值**。

(4) ***无矛盾原则***。不能同意矛盾式，不能反对重言式。

这样，如果α是矛盾式，则任给 D 上赋值 V，都有 $V(\alpha)\ne 1$。如果α是重言式，则任给 D 上赋值 V，都有 $V(\alpha)\ne 0$。

注意，我们并不要求同意重言式，反对矛盾式。所以对于重言式α，并不一定有 $V(\alpha) = 1$，对于矛盾式α，并不一定有 $V(\alpha) = 0$。

如果$\alpha_1,\cdots,\alpha_k$是不一致的，则不可能存在态度逻辑 D 上赋值 V，使得任给 $1\le j\le k$，都有 $V(\alpha_j) = 1$。否则，由拟古典逻辑性得 $V(\alpha_1\cap\cdots\cap\alpha_k) = 1$，但$\alpha_1\cap\cdots\cap\alpha_k$的矛盾式。

(5) ***明确原则***。如果对每个支命题的态度都是不明确的，则对复合命题的态度也是不明确的。

(6) ***保守原则***。只有既同意α又同意β才同意$\alpha\cap\beta$。

这原则看起来太保守了，在一个有 1000 个条文的提议中，同意了 999 条，仅不同意（不一定反对）1 条，就不投同意票。

但这原则必须遵循的，否则会产生荒谬的后果。设想这 999 条是集体中每个人都同意的，而另外 1 条是大家都反对的。结果这提议被通过（而且是一致通过），这个集体就同意了 1 条大家都不同意的条文。

(7) ***谨慎原则***。只有反对α或反对β才反对$\alpha\cap\beta$。

这是当然的，我们不应该在对所有条文都不反对的情况下，去反对整个提议。

虽然我们使用了多值逻辑，但命题的重言式、矛盾式、一致、不一致、独立等概念仍然是相对古典逻辑而言的。

集体认定的原则

(1) ***有限性***。作出集体认定的集体中的人数是有限的。

(2) ***数量性***。作出集体认定的根据是同意的人数，而不管是谁同意。

这个原则来源于投票中的公平原则，每个的票起的作用是同样的。

由(1)和(2)，我们并不需要一个具体的人的集合，而只需要一个自然数——作

出集体认定的集体的总人数，这个数记为 n。

因为个人的态度模式可以不一样，所以还需要 n 个态度逻辑 $D_1,\cdots, D_n$。

(3) **单调性**。如果有 m 个人同意时作出了集体认定，则多于 m 个人同意时也必定作出了集体认定。

由(3)，我们还需要另一个自然数——作出集体认定时同意人数的最小数，这个数记为 m。只要同意的人数大于等于 m，就意味着作出了集体认定。

(4) **非退化性**。至少有一个人同意时才能作出集体认定。形式地说，也就是要求 m≥1。

四、形式语义

由上节的讨论，我们需要一个集体的总人数 n，同意的最小数 m，它们满足 1≤m≤n，还需要 n 个态度逻辑。

定义 4.1　框架　$K = <m, n, <D_1,\cdots, D_n>>$称为集体认定逻辑的一个框架，其中 1≤m≤n，任给 1≤i≤n，D_i 是态度逻辑。

定义 4.2　赋值　$K = <m, n, <D_1,\cdots, D_n>>$是框架，K 上一个赋值是$\sigma = <V_1,\cdots, V_n>$，其中任给 1≤i≤n，$V_i$ 是 D_i 上赋值。

公式在赋值下的值分成两个步骤，首先是根据集体认定的原则，给出原子公式 $F(\alpha)$的值，其次，在原子公式赋值的基础上，按古典逻辑的方式，给出$\neg A$ 和 $A\wedge B$ 的值。

定义 4.3　公式在赋值下的值　$K = <m, n, <D_1,\cdots, D_n>>$是框架，$\sigma = <V_1,\cdots, V_n>$是 K 上赋值。公式在$\sigma$下的值（t 或 f）归纳定义如下：

$$(1)\ \sigma(F(\alpha)) = \begin{cases} t & \text{如果 } |\{i \mid V_i(\alpha) = 1\}| \geq m \\ f & \text{否则} \end{cases}$$

$$(2)\ \sigma(\neg A) = \begin{cases} t & \text{如果 } \sigma(A) = f \\ f & \text{如果 } \sigma(A) = t \end{cases}$$

$$(3)\ \sigma(A\wedge B) = \begin{cases} t & \text{如果 } \sigma(A\wedge B) = t \text{ 且} \sigma(A\wedge B) = t \\ f & \text{如果 } \sigma(A\wedge B) = f \text{ 或} \sigma(A\wedge B) = f \end{cases}$$

由赋值可以定义逻辑中重要的满足概念。

定义 4.4　满足

(1) K 是框架，如果任给 K 上赋值σ，都有$\sigma(A) = t$，则称 K 满足 A，记为 $K\models A$。

(2) Γ是框架类，如果任给 $K\in\Gamma$，都有 K 满足 A，则称Γ满足 A，记为$\Gamma\models A$。

考虑一些满足的例子。

引理 4.5 态度逻辑的性质 D 是态度逻辑，V 是 D 上赋值。

(1) 如果α的矛盾式，则 $V(\alpha) \neq 1$。

(2) 如果 $V(\alpha\cap\beta) = 1$，则 $V(\alpha) = 1$ 且 $V(\beta) = 1$。

(3) $V(\sim\sim\alpha) = 1$ 当且仅当 $V(\alpha) = 1$。

(4) $V(\alpha\cap\beta) = 1$ 当且仅当 $V(\beta\cap\alpha) = 1$。

(5) $V((\alpha\cap\beta)\cap\gamma) = 1$ 当且仅当 $V(\alpha\cap(\beta\cap\gamma)) = 1$。■

定理 4.6 认定逻辑的普遍原则 $K = <m, n, <D_1,\cdots, D_n>>$

(1) **个人无矛盾原则** 如果α是矛盾式，则 $K \models \neg F(\alpha)$。

(2) **半合取原则** $K \models F(\alpha\cap\beta)\rightarrow F(\alpha)\wedge F(\beta)$。

(3) **弱等价原则** $K \models F(\sim\sim\alpha)\Leftrightarrow F(\alpha)$，$K \models F(\alpha\cap\beta)\Leftrightarrow F(\beta\cap\alpha)$，$K \models F((\alpha\cap\beta)\cap\gamma)\Leftrightarrow F(\alpha\cap(\beta\cap\gamma))$。

证

(1) 任给 K 上赋值$\sigma = <V_1,\cdots, V_n>$，由引理 2.5 的(1)得

$$|\{i \mid V_i(\alpha) = 1\}| = 0,$$

所以

$$\sigma(F(\alpha)) = f,$$

因此$\sigma(\neg F(\alpha)) = t$。

(2) 任给 K 上赋值$\sigma = <V_1,\cdots, V_n>$，由引理 2.5 的(2)得

$$|\{i \mid V_i(\alpha\cap\beta) = 1\}| \leq |\{i \mid V_i(\alpha) = 1\}|$$

且

$$|\{i \mid V_i(\alpha\cap\beta) = 1\}| \leq |\{i \mid V_i(\beta) = 1\}|,$$

因此$\sigma(F(\alpha\cap\beta)\rightarrow F(\alpha)\wedge F(\beta)) = t$。

(3) 任给 K 上赋值$\sigma = <V_1,\cdots, V_n>$，由引理 2.5 的(3)(4)(5)得

$$|\{i \mid V_i(\sim\sim\alpha) = 1\}| = |\{i \mid V_i(\alpha) = 1\}|,$$

$$|\{i \mid V_i(\alpha\cap\beta) = 1\}| = |\{i \mid V_i(\beta\cap\alpha) = 1\}|,$$

$$|\{i \mid V_i((\alpha\cap\beta)\cap\gamma) = 1\}| = |\{i \mid V_i(\alpha\cap(\beta\cap\gamma)) = 1\}|,$$

因此

$$\sigma(F(\sim\sim\alpha)\Leftrightarrow F(\alpha)) = t,$$

$$\sigma(F(\alpha\cap\beta)\Leftrightarrow F(\beta\cap\alpha)) = t,$$

$$\sigma(F(\alpha\cap\beta)\Leftrightarrow F(\beta\cap\alpha)) = t。$$

■

四、不一致性

$\alpha_1,\cdots,\alpha_k$是不一致的，什么情况下，它们可以同时被集体认定。我们从反面考虑：什么情况下，任意不一致的命题$\alpha_1,\cdots,\alpha_k$不能同时被认定。

我们的结果是：当 $m/n>1/2$ 时，任意 2 个不一致的命题不可能被同时认定，当 $m/n>2/3$ 时，任意 3 个不一致的命题不可能被同时认定，一般地，当 $m/n>(k-1)/k$ 时，任意 k 个不一致的命题不可能被同时认定。

在以下的讨论中，都设 $K = \langle m, n, \langle D_1,\cdots, D_n\rangle\rangle$，K 上赋值简称为赋值。

$\alpha_1,\cdots,\alpha_k$是命题，$\sigma = \langle V_1,\cdots, V_n\rangle$是赋值。

任给 $1\le i\le n$，令

$$a_i = |\{j \mid V_i(\alpha_j) = 1\}|,$$

任给 $1\le j\le k$，令

$$b_j = |\{i \mid V_i(\alpha_j) = 1\}|,$$

引理 5.1

(1) $a_1+\cdots+a_n = b_1+\cdots+b_k$。

(2) 任给 $1\le j\le k$，$\sigma(F(\alpha_j)) = f$ 当且仅当 $b_j<m$。

(3) 如果$\alpha_1,\cdots,\alpha_k$是独立的，则存在赋值σ，使得任给 $1\le j\le k$，都有 $b_j>(n(k-1)/k)-1$。■

定理 5.2　任给 $k\ge1$，任给 k 个独立的不一致的命题$\alpha_1,\cdots,\alpha_k$，都有

$$K \models \neg(F(\alpha_1)\wedge\cdots\wedge F(\alpha_k)) \text{ 当且仅当 } m/n>(k-1)/k。$$

证　设 $m/n>(k-1)/k$。任给赋值σ，任给 $1\le i\le n$，由$\alpha_1,\cdots,\alpha_k$是不一致的得 $a_i\le k-1$，所以

$$a_1+\cdots+a_n \le n(k-1),$$

由引理 5.1(1)得 $b_1+\cdots+b_k\le n(k-1)$，所以

存在 $1\le j\le k$，使得 $b_j\le n(k-1)/k<m$，

由引理 5.1(2)得

$$\sigma(F(\alpha_j)) = f,$$

因此$\sigma(\neg(F(\alpha_1)\wedge\cdots\wedge F(\alpha_k))) = t$。

设 $m/n\le(k-1)/k$。由引理 1(3)得存在赋值σ，使得任给 $1\le j\le k$，都有 $b_j>(n(k-1)/k)-1\ge m-1$，所以

任给 $1\le j\le k$，都有 $b_j\ge m$，

由引理 5.1(2)得

$$\sigma(F(\alpha_j)) = t,$$

因此$\sigma(\neg(F(\alpha_1)\wedge\cdots\wedge F(\alpha_k))) = f$。■

六、合取原则

$\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 是命题，任给 $1\le j\le k$，令

$$\beta_j = \alpha_1\cap\cdots\cap\alpha_{j-1}\cap\alpha_{j+1}\cap\cdots\cap\alpha_k,$$

$$F^k(\alpha_1,\cdots,\alpha_k) = F(\beta_1)\wedge\cdots\wedge F(\beta_k)。$$

$F^k(\alpha_1,\cdots,\alpha_k) = F(\beta_1)\wedge\cdots\wedge F(\beta_k)$的直观意义是：$\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 中的任意 k-1 个命题的合取都被认定。

$F(\alpha_1\cap\cdots\cap\alpha_k)$直观意义是：$\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 的合取$\alpha_1\cap\cdots\cap\alpha_k$ 被认定。

从$\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 中的任意 k-1 个命题的合取都被认定，推出$\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 的合取$\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_k$ 被认定，称为 k-合取原则。所以 k-合取原则的形式表示是：

$$F^k(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)\rightarrow F(\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_k)。$$

$k = 2$ 时，形式表示为：$F(\alpha_1)\wedge F(\alpha_2)\rightarrow F(\alpha_1\cap\alpha_2)$。这就是通常的合取原则。

我们讨论什么条件下，k-合取原则成立。

我们的结果是：当 $n-m<1$ 时，2-合取原则成立，当 $n-m<2$ 时，3-合取原则成立，一般地，当 $n-m<k-1$ 时，k-合取原则成立。但需要$\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 是独立的和一致的。

$\sigma = <V_1,\cdots,V_n>$是赋值。任给 $1\le j\le k$，令

$$b_j = |\{i \mid V_i(\beta_j) = 1 \text{ 且 } V_i(\alpha_1\cap\cdots\cap\alpha_k) = 0\}|。$$

$$a = |\{i \mid V_i(\alpha_1\cap\cdots\cap\alpha_k) = 1\}|,$$

引理 6.1

(1) $a+b_1+\cdots+b_k\le n$。

(2) $\sigma(F(\alpha_1\cap\cdots\cap\alpha_k)) = t$ 当且仅当 $a\ge m$。

(3) $\sigma(F^k(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)) = t$ 当且仅当任给 $1\le j\le k$，$a+b_j\ge m$。

(4) 如果$\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 是独立的和一致的，则任给满足

$$c+d_1+\cdots+d_k = n \text{ 的 } c, d_1,\cdots,d_k,$$

都存在赋值σ，使得 $a = c, b_1 = d_1,\cdots, b_k = d_k$。■

定理 6.2　任给 $k\ge2$，任给 k 个独立的一致的命题$\alpha_1,\cdots,\alpha_k$，都有

$$K \models F^k(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)\rightarrow F(\alpha_1\cap\cdots\cap\alpha_k) \text{当且仅当 } n-m<k-1。$$

证　设 $n-m<k-1$。任给赋值σ，由$\sigma(F^k(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)) = t$ 和引理 6.1(3)得

任给 $1\le j\le k$，$a+b_j\ge m$

再由 $a+b_1+\cdots+b_k\le n<k-1+m$ 得

存在 $1\le j\le k$，使得 $b_j = 0$，

所以

$a\ge m$，

由引理 6.1(2)得$\sigma(F(\alpha_1\cap\cdots\cap\alpha_k)) = t$。

设 $n-m\geq k-1$。取

$$c = m-1,\ d_1 = 1,\cdots,\ d_{k-1} = 1,\ d_k = n-m-k+2\geq 1,$$

则

$$c+d_1+\cdots+d_k = n,$$

由引理 2(4)得

存在赋值σ，使得 $a = c,\ b_1 = d_1,\cdots,\ b_k = d_k$，

所以

$$a<m$$

且

任给 $1\leq j\leq k$，都有 $a+b_j\geq m$，

由引理 2(2)得

$$\sigma(F(\alpha_1\cap\cdots\cap\alpha_k)) = f$$

由引理 2(3)得

$$\sigma(F^k(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)) = t。$$

因此$\sigma(F^k(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)\rightarrow F(\alpha_1\cap\cdots\cap\alpha_k)) = f$。■

参 考 文 献

[1] 刘壮虎：基于多值逻辑的评价逻辑系统，《自然辩证法研究》1993 年 3 期

[2] 张清宇、郭世铭、李小五：《哲学逻辑研究》，社会科学文献出版社，1997 年

[3] 刘壮虎：《集体认定的逻辑》，《自然辩证法研究》1998 年增刊